

# Prve hrvatske rentne tablice

Dr. sc. Bojan Basrak, izv. prof. PMF-MO  
Dr. sc. Miljenko Huzak, izv. prof. PMF-MO  
Dr. sc. Anamarija Jazbec, red. prof. ŠF

Svibanj 2015.

# Sadržaj

<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Baza za izradu tablica</b>	<b>4</b>
1.1 Statistički podaci o smrtnosti opće populacije u Hrvatskoj . . .	4
1.2 Model za projiciranje buduće smrtnosti . . . . .	5
1.3 Model za procjenu opažene smrtnosti . . . . .	6
1.4 Iskustvo smrtnosti rentnih osiguranika u Hrvatskoj . . . . .	8
<b>2 Rentne tablice opće populacije</b>	<b>9</b>
<b>3 Rentne tablice osiguranika odgođenih renti</b>	<b>20</b>
<b>4 Rentne tablice osiguranika neodgođenih renti</b>	<b>23</b>
<b>Literatura</b>	<b>25</b>
<b>Dodatak</b>	<b>26</b>

# Uvod

Na inicijativu Hrvatskog aktuarskog društva (HAD) početkom 2014. g. pokrenut je zajednički projekt Hrvatskog ureda za osiguranje (HUO), HAD-a i Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu (PMF-MO) na izradi prvih hrvatskih kohortnih tablica smrtnosti za rentna osiguranja (rentne tablice smrtnosti). Proizvodi tog projekta su:

- rentne tablice smrtnosti opće hrvatske populacije, odvojeno po spolu i zajedničke (*unisex*), koje se sastoje od bazičnih populacijskih tablica smrtnosti za generacije muškaraca, žena i osoba (neovisno o spolu) rođenih 1970., i tablice pomaka u dobi kojima se iz bazičnih tablica izvode rentne tablice smrtnosti za generacije muškaraca, žena i osoba rođenih od 1951. do 2010. godine,
- rentne tablice smrtnosti osiguranika odgođenih renti u Hrvatskoj, odvojenih po spolu i zajedničke, i
- rentne tablice smrtnosti osiguranika neodgođenih renti u Hrvatskoj, odvojenih po spolu i zajedničke.

Osnovna motivacija za izradu tih tablica je u njihovoj eventualnoj upotrebi na tržištu mirovinskih osiguranja u Republici Hrvatskoj (RH) koje je tek na početku razvoja. Zbog toga je potrebno istaknuti da su navedene tablice inicijalne u smislu da ih treba redovito i periodično usklađivati i korigirati na osnovi novih i u narednim razdobljima opažanih podataka o smrtnosti opće populacije, te dostupnosti podataka o stvarnoj smrtnosti populacija rentnih osiguranika u RH, odnosno konkretnog osiguravajućeg društva u RH.

Na projektu su radili i surađivali dr.sc. Anamaria Jazbec, red. profesor Šumarskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu (ŠF), te dr.sc. Bojan Basrak i dr.sc. Miljenko Huzak, izv. profesori PMF-MO, uz stručnu pomoć HAD-a u prikupljanju podataka i recenziji tablica.

Autori se posebno zahvaljuju gospođama Ireni Ročan i Kseniji Sanjković iz HAD-a na pomoći i podršci pri realizaciji projekta, kolegi Marinku Grizelju iz Državnog zavoda za statistiku RH na periodnim tablicama smrtnosti za opću hrvatsku populaciju, te Radnoj grupi HAD-a za recenziju tablica, posebno kolegicama Deani Maček, Ireni Goleš i Ani Handžiski, na korisnim konzultacijama i stručnoj suradnji.

# 1 Baza za izradu tablica

Prve hrvatske rentne tablice izrađene su na osnovi iskustava izrade rentnih tablica smrtnosti iz literature, posebno iskustava izrade slovenskih rentnih tablica [1] i projiciranja smrtnosti sjevernoeuropskih populacija [5]. U skladu s tim iskustvima i dostupnosti vlastitih empirijskih podataka, osnova za izradu hrvatskih rentnih tablica sastoji se od sljedećih elemenata:

1. statističkih podataka o smrtnosti populacije u RH,
2. modela za povezanost smrtnosti s dobi i kalendarskim vremenom u svrhu *projiciranja buduće* smrtnosti,
3. modela za *procjenu opažene* smrtnosti i
4. *pretpostavljenoj* smrtnosti rentnih osiguranika u RH.

## 1.1 Statistički podaci o smrtnosti opće populacije u Hrvatskoj

Za procjenu prošle (opažene) i projiciranje smrtnosti opće populacije u RH koristili su se sljedeći izvori:

1. tablice smrtnosti (po dobi i spolu) u SRH/RH za razdoblja 1952.-54., 1960.-62., 1970.-72. i 1980.-82.,
2. broj umrlih u SRH/RH (po dobi i spolu) u kalendarskim godinama od 1984. do 2010. godine i
3. popisi stanovništva u SRH/RH (po dobi i spolu) u godinama 1961., 1971., 1981., 1991., 2001. i 2011.

Izvor svih podataka je Državni zavod za statistiku RH (DZS).

Broj umrlih je klasificiran po dobi na zadnji rođendan. Ista definicija dobi je korištena pri dobnoj klasifikaciji stanovnika prilikom navedenih popisa stanovništva, pri čemu se za datum popisa u svakoj od navedenih godina koristi 31. ožujak.

Prilikom popisivanja stanovništva korištene su razne popisne metodologije, ali smo smatrali da za potrebe izrade inicijalnih rentnih tablica smrtnosti njihov eventualan utjecaj na smrtnost možemo zanemariti. Nadalje, u svakoj popisnoj godini osim zadnje, 2011., imamo određeni broj stanovnika (oba spola) nepoznate dobi (neklasificirani po dobi). Budući da po dobi neklasificiranih osoba imamo i među umrlima, te kako su njihovi brojevi u sličnom odnosu sa brojevima neklasificiranih osoba po dobi u odgovarajućim popisima, a i relativno su mali ( $< 1\%$ , osim 1991. kada je  $\approx 2\%$  od ukupnog broja), te osobe smo u procjeni smrtnosti zanemarili.

## 1.2 Model za projiciranje buduće smrtnosti

Za projiciranje buduće smrtnosti opće populacije u RH koristimo *Poissonov log-bilinearni regresijski model* [4]. Po tom modelu, ukupan broj umrlih osoba u dobi  $x$  i tijekom kalendarske godine  $t$  ravna se po Poissonovom zakonu razdiobe sa srednjom (očekivanom) vrijednosti  $E_x^c(t)\mu_x(t)$  *uvjetno* na vremenski niz  $(\kappa_t)$ :

$$D_x(t) \sim \text{Poisson}(E_x^c(t)\mu_x(t)) \text{ uvjetno na } (\kappa_t), \quad (1)$$

pri čemu je  $E_x^c(t)$  centralna izloženost riziku osoba dobi  $x$  u kalendarskoj godini  $t$ , a  $\mu_x(t)$  je intenzitet smrtnosti osoba dobi  $x$  u kalendarskoj godini  $t$ . Za  $\mu_x(t)$  se pretpostavlja da vrijedi

$$\log \mu_x(t) = a_x + b_x \kappa_t, \quad (2)$$

a za  $(\kappa_t)$  da je stacionarni vremenski niz tipa ARIMA s odgovarajućim parametrima  $p$ ,  $q$  i  $r$ :

$$(\kappa_t) \sim \text{ARIMA}(p, q, r).$$

Taj model se među konkurentnim modelima pokazao najprimjerenijim za projiciranje buduće smrtnosti u slovenskoj [1] i nekim sjevernoeuropskim populacijama [5].

Parametri modela su  $a_x$ ,  $b_x$ ,  $\kappa_t$ . Procjenjuju se metodom maksimalne vjerodostojnosti (na način opisan u [4] i [5]) iz historijskih podataka o broju

umrlih  $D_x(t)$  i centralnoj izloženosti riziku  $E_x^c(t)$ , uz uvjet da je

$$\sum_{x \geq 0} b_x = 1, \quad \sum_{t \leq t_0} \kappa_t = 0. \quad (3)$$

Budući da se centralna izloženost riziku ne opaža neposredno, aproksimira se iz popisnih podataka, a na temelju sljedeće relacije:

$$E_x^c(t) = \int_0^1 P_{x,t}(s) ds. \quad (4)$$

Ovdje  $P_{x,t}(s)$  predstavlja broj osoba dobi  $x$  na datum  $s$  popisa u kalendarskoj godini  $t$ . Kako u slučaju hrvatskih rentnih tablica raspolažemo samo sa popisnim podacima na određeni (jedan) datum u nekim kalendarskim godinama (svaka deseta), integral (4) se aproksimira trapeznom formulom, odnosno egzaktnim integralom proširenja funkcija  $u \mapsto P_{x,t}(u - t)$  po linearnosti duž intervalu  $[t, t + 1]$  (ovdje  $t$  u indeksu funkcije  $P_{x,t}$  predstavlja kalendarsku godinu  $t$ , a u argumentu te funkcije i navedenom intervalu integracije datum 1. siječnja te godine). Proširenje se konstruira na čitavom kalendarskom razdoblju za koje postoje popisni podaci.

Procjene parametara označavamo sa  $\hat{a}_x, \hat{b}_x, \hat{\kappa}_t$ .

Iz dobivenih procjena  $(\hat{\kappa}_t)_{t \leq t_0}$  historijskih članova vremenskog niza, metodama statističke inferencije (opisane u npr. [3]) odredi se i procijeni odgovarajući ARIMA-model (za definiciju modela vidjeti također u [3]), a zatim se iz tako dobivenog modela projiciraju buduće vrijednosti (u oznaci  $(\hat{\kappa}_t)_{t > t_0}$ ) od  $(\kappa_t)_{t > t_0}$ . Ovdje  $t_0$  predstavlja zadnju godinu na koju se odnose historijski podaci za procjenu modela. U slučaju prvih hrvatskih rentnih tablica je  $t_0 = 2010$ .

Projicirani (budući) intenziteti smrtnosti su jednaki

$$\hat{\mu}_x(t) = \exp(\hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{\kappa}_t), \quad 0 \leq x \leq 100, \quad t > t_0. \quad (5)$$

### 1.3 Model za procjenu opažene smrtnosti

U kalendarskoj godini  $t$  za koju su nam dostupna oba podatka, broj umrlih  $D_x(t)$  i centralna izloženost riziku  $E_x^c(t)$  (do na aproksimaciju opisanu u 2. poglavlju), za procjenu intenziteta smrtnosti koristimo Poissonov model:

$$D_x(t) \sim \text{Poisson}(E_x^c(t)\mu_x(t)).$$

Procjena maksimalne vjerodostojnosti za  $\mu_x(t)$  je tada:

$$\hat{\mu}_x(t) = \frac{D_x(t)}{E_x^c(t)}. \quad (6)$$

U slučaju muškaraca (u oznaci  $m$ ) ili žena ( $f$ ), ukoliko je opaženi broj umrlih  $D_x(t)$  jednak 0, tada se  $\hat{\mu}_x(t)$  procjenjuje pomoću formule (5) na osnovi procijenjenog Poissonovog log-bilinearnog modela (1-2). Dakle,  $\mu_x(t) = \mu_x^m(t)$  za muškarce i  $\mu_x(t) = \mu_x^f(t)$  za žene se procjenjuju po formuli:

$$\hat{\mu}_x(t) = \begin{cases} \frac{D_x(t)}{E_x^c(t)} & D_x(t) \neq 0 \\ \exp(\hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{k}_t) & D_x(t) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Nakon procjene inteziteta smrtnosti po spolovima, po formuli (7), intezitet smrtnosti za osobe (neovisno o spolu, u oznaci  $u$ ) se procjenjuje po formuli

$$\hat{\mu}_x^u(t) = \begin{cases} \frac{D_x^u(t)}{E_x^{cu}(t)}, & D_x^m(t) \neq 0 \text{ i } D_x^f(t) \neq 0 \\ \alpha_x^m(t)\hat{\mu}_x^m(t) + \alpha_x^f(t)\hat{\mu}_x^f(t), & D_x^m(t) = 0 \text{ ili } D_x^f(t) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

pri čemu su  $\alpha_x^m(t)$  i  $\alpha_x^f(t)$  omjeri muškaraca i žena pod rizikom u populaciji u dobi  $x$  u kalendarskoj godini  $t$ .

U slučaju da su nam nepoznati brojevi umrlih u kalendarskoj godini  $t$ , intenzitet smrtnosti se procijeni pomoću linearnog regresijskog modela za logaritam intenziteta smrtnosti:

$$\log \mu_x(t) = \ell_x + k_x \cdot t + \varepsilon_{x,t} \quad (9)$$

prilagođenog podacima  $\log \tilde{\mu}_x(t)$  izvedenih iz sirovih stopa smrtnosti  $\tilde{q}_x(t)$  publiciranih u tablicama smrtnosti DZS za odgovarajuća razdoblja  $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ , za svaku dob posebno. Formula za  $\tilde{\mu}_x(t)$  (za muškarce i žene) je (aktuarska formula):

$$\tilde{\mu}_x(t) = \frac{\tilde{q}_x(t)}{1 - f_x \cdot \tilde{q}_x(t)}, \quad (10)$$

pri čemu je ([1])

$$f_x = \begin{cases} 0.15 & \text{za muške ako je } x = 0 \\ 0.16 & \text{za žene ako je } x = 0 \\ 0.50 & \text{ako je } x \geq 1. \end{cases} \quad (11)$$



Ovdje su parametri modela  $\ell_x$  i  $k_x$  koji se procijene (netežinskom) metodom najmanjih kvadrata, a procijenjene vrijednosti intenziteta smrtnosti (za muškarce i žene posebno) su

$$\hat{\mu}_x(t) = \exp(\hat{\ell}_x + \hat{k}_x \cdot t). \quad (12)$$

Nakon procjenjivanja intenziteta smrtnosti  $\mu_x^m(t)$ ,  $\mu_x^f(t)$  po spolu, po formuli (12), odgovarajuće procjene intenziteta smrtnosti za osobe neklasificirane po spolu (*unisex*) su:

$$\hat{\mu}_x^u(t) = \alpha_x^m(t)\hat{\mu}_x^m(t) + \alpha_x^f(t)\hat{\mu}_x^f(t). \quad (13)$$

## 1.4 Iskustvo smrtnosti rentnih osiguranika u Hrvatskoj

Budući da je tržište rentnih (mirovinskih) osiguranja tek u začetku, ne postoje relevantni podaci o smrtnosti dviju hrvatskih potpopulacija: osiguranika odgođenih i neodgođenih renti. Zbog toga je racionalno postaviti model za smrtnost tih potpopulacija na osnovi pretpostavke sličnosti sa smrtnosti populacija sličnih historijskih, demografskih i uopće društveno-ekonomskih karakteristika. U tom smislu nama najbliža populacija koja je postavila model za smrtnost relevantnih potpopulacija osiguranika je slovenska. Model se temelji na relativnom iskustvu smrtnosti engleskih rentnih osiguranika u odnosu na englesku opću populaciju, te na sličnom iskustvu njemačke populacije. Dakle, model smrtnosti rentnih osiguranika u RH bazira se na modelu smrtnosti rentnih osiguranika u Republici Sloveniji opisanom u [1].

## 2 Rentne tablice opće populacije

Prvi korak u izradi rentnih tablica opće populacije je izrada niza od 161 periodne tablice smrtnosti za kalendarske godine od 1951. do 2111.

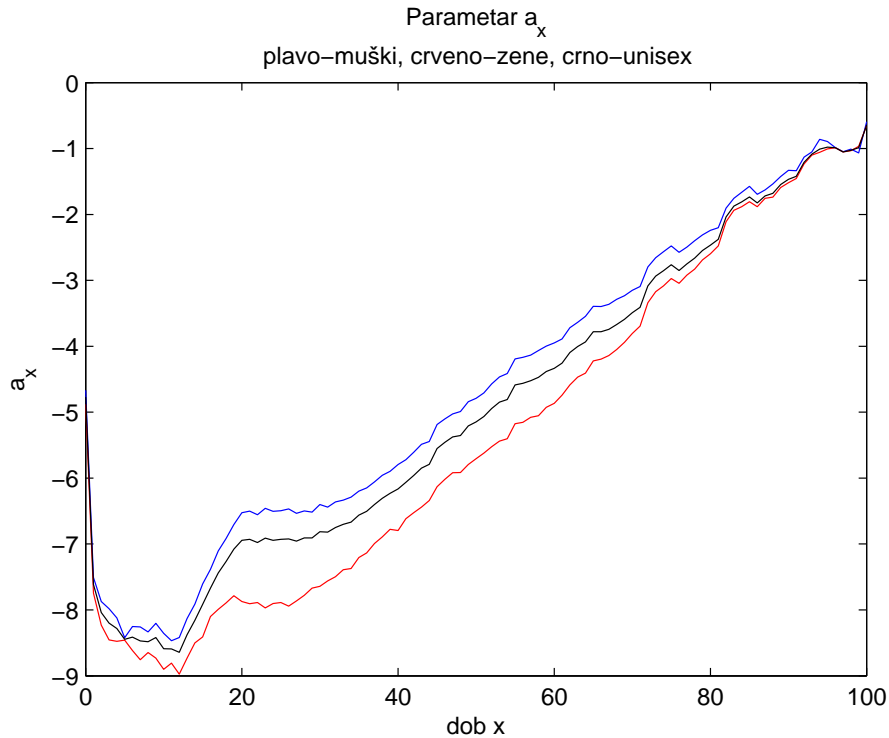
Budući da su dostupni podaci o broju umrlih u kalendarskim godinama od 1984. do 2010., za to razdoblje smo procijenili intenzitete smrtnosti po formulama (7-8). Pri tome su centralne izloženosti riziku  $E_x^c(t)$  za kalendarske godine od 1962. do 2010., za muškarce, žene i osobe neovisno o spolu, procijenjene trapeznom formulom na osnovi proširenja popisnih funkcija  $u \mapsto P_{x,t}(u)$  po linearnosti duž dobnog razdoblja od 31. ožujka 1961. do 31. ožujka 2011. godine (vidjeti potpoglavlje 1.2). Omjere izloženosti riziku muškaraca i žena koji se pojavljuju u formuli (8) (i u formuli (13)) procijenili smo po sljedećim formulama:

$$\alpha_x^m(t) = \begin{cases} \frac{1}{49} \sum_{\tau=1962}^{2010} \frac{E_x^{cm}(\tau)}{E_x^{cu}(\tau)}, & t \leq 1961 \text{ ili } t \geq 2011 \\ \frac{E_x^{cm}(t)}{E_x^{cu}(t)}, & 1962 \leq t \leq 2010, \end{cases} \quad (14)$$

$$\alpha_x^f(t) = \begin{cases} \frac{1}{49} \sum_{\tau=1962}^{2010} \frac{E_x^{cf}(\tau)}{E_x^{cu}(\tau)}, & t \leq 1961 \text{ ili } t \geq 2011 \\ \frac{E_x^{cf}(t)}{E_x^{cu}(t)}, & 1962 \leq t \leq 2010. \end{cases} \quad (15)$$

Za navedene procjene omjera formula (13) je egzaktna za intenzitete smrtnosti muškaraca, žena i osoba dobivenih po formuli (6) za godine od 1984. do 2010.

Za kalendarske godine od 1951. do 1983., za muškarce i žene, koristili smo procjene intenziteta smrtnosti po formuli (12) na osnovi linearnog regresijskog modela (9) i izvedenih podataka o logaritmima sirovih intenziteta smrtnosti  $\log \tilde{\mu}_x(t)$  dobivenih iz tablica smrtnosti DZS (po formuli (10)) za razdoblja 1952.-1954. (uzimali smo da je taj podatak u odnosu na kalendarsku godinu  $t_1 = 1953$ ), 1960.-1962. ( $t_2 = 1961$ ), 1970.-1972. ( $t_3 = 1971$ )



Slika 1: Procjene parametara  $a_x$  Poissonovog log-bilinearnog modela.

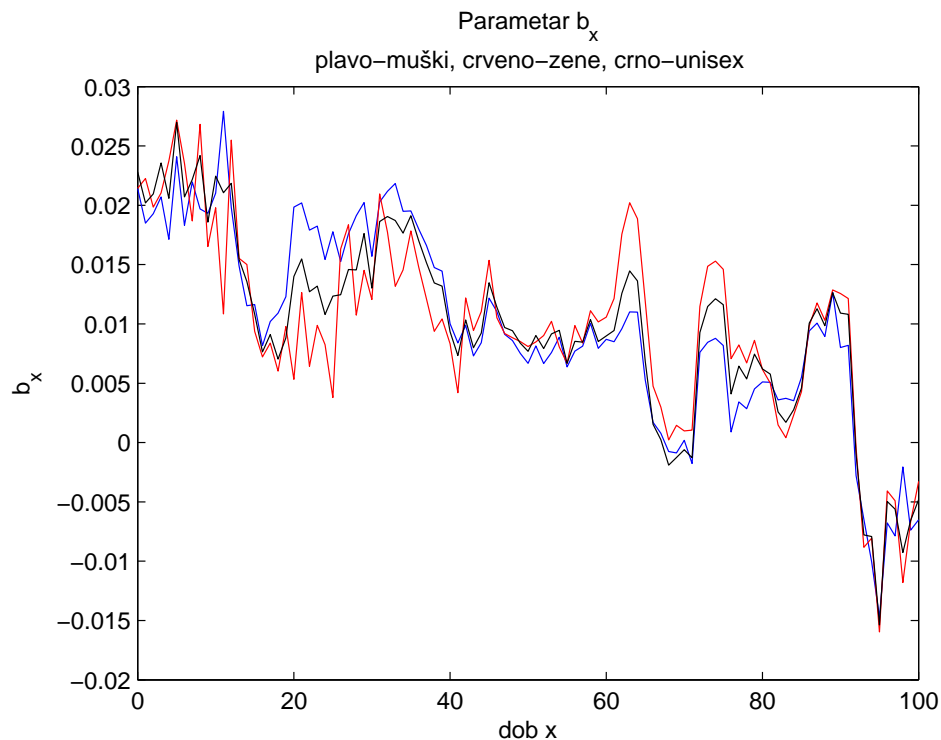
i 1980.-1982. ( $t_4 = 1981$ ). Za osobe (neovisno o spolu) intenzitete smrtnosti smo procijenili iz dobivenih procjena intenziteta smrtnosti za muškarce i žene po formuli (13).

Periodne tablice za godine od 2011. do 2122. dobili smo projiciranjem Poissonovog log-bilineranog modela prilagođenog podacima za razdoblje od 1984. do 2010. godine. Dobivene procjene parametara  $a_x$ ,  $b_x$  i  $\kappa_t$  prikazane su na slikama 1-3.

Statističkom analizom procijenjenih članova vremenskih nizova ( $\kappa_t$ ;  $1984 \leq t \leq 2010$ ) za muškarce, žene i osobe posebno, pokazano je da postoji značajan trend, te da se u sva tri slučaja ARIMA(0,1,0)-model

$$\kappa_{t+1} = \kappa_t + c + \sigma\varepsilon_t, \quad (\varepsilon_t) \sim WN(0, 1), \quad (16)$$

značajno ne razlikuje od složenijih ARIMA-modela (uz razinu značajnosti od



Slika 2: Procjene parametara  $b_x$  Poissonovog log-bilinearnog modela.

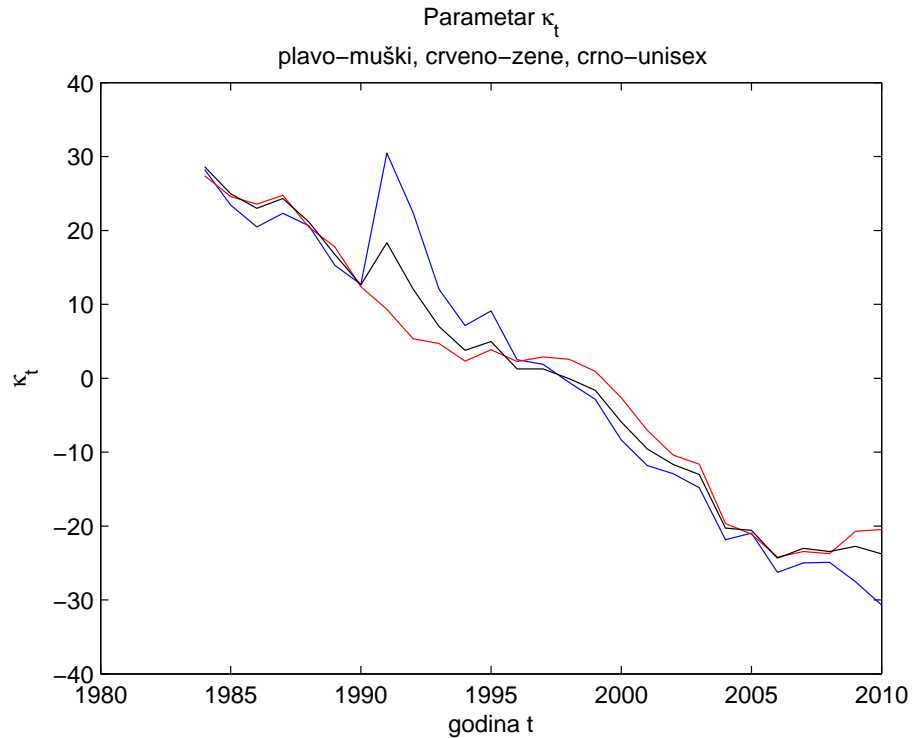
5%). Procijenjeni parametri modela (16) su:

	muškarci ( $m$ )	žene ( $f$ )	osobe ( $u$ )
$\hat{c}$	-2.2664	-1.8410	-2.0153
$\hat{\sigma}$	5.1151	2.4291	2.7961

U slučaju muškaraca i žena, članove niza ( $\kappa_t$ ) smo projicirali po formuli:

$$\hat{\kappa}_t = \hat{\kappa}_{2010} + \hat{c}(t - 2010), \quad t = 2011, 2012, \dots, 2111, \quad (17)$$

a zatim smo intenzitete smrtnosti muškaraca i žena projicirali po formuli (5), a za osobe neovisno o spolu, po formuli (13), za godine  $t = 2011, \dots, 2111$ . Dobivene projekcije za osobe verificirali smo na sljedeći način. Primjenom inverza formule (5) izračunali smo odgovarajuće vrijednosti  $\hat{\kappa}_t^u$  i provjerili da



Slika 3: Procjene članova vremenskog niza ( $\kappa_t$ ) iz Poissonovog log-bilinearnog modela.

li se za svaki  $t = 2011, \dots, 2111$ ,  $\hat{\kappa}_t^u$  nalazi u 95% prediktivnom intervalu za  $\kappa_t^u$ :

$$[\hat{\kappa}_{2010}^u + \hat{c}^u(t - 2010) - 2 \cdot \hat{\sigma}^u \sqrt{t - 2010}, \hat{\kappa}_{2010}^u + \hat{c}^u(t - 2010) + 2 \cdot \hat{\sigma}^u \sqrt{t - 2010}]. \quad (18)$$

Na slici 4 se vidi da je taj uvjet ispunjen.

Druga mogućnost je da članove niza ( $\kappa_t$ ) za muškarce i žene projiciramo po formulama:

$$\hat{\kappa}_t^m = \hat{\kappa}_{2010}^m + \hat{c}^m(t - 2010) - 2 \cdot \hat{\sigma}^m \sqrt{t - 2010} \quad (19)$$

$$\hat{\kappa}_t^f = \hat{\kappa}_{2010}^f + \hat{c}^f(t - 2010) - 2 \cdot \hat{\sigma}^f \sqrt{t - 2010} \quad (20)$$

za  $t = 2011, \dots, 2111$ , kako ne bi precijenili smrtnost. I u ovom slučaju smo intenzitete smrtnosti muškaraca i žena projicirali po formuli (5), a za osobe neovisno o spolu, po formuli (13), za godine  $t = 2011, \dots, 2111$ . Za razliku

od prethodnog slučaja, kada smo primjenom inverza formule (5) izračunali odgovarajuće vrijednosti  $\hat{\kappa}_t^u$ , dobili smo da se za sve  $t = 2011, \dots, 2111$ , projicirane vrijednosti  $\hat{\kappa}_t^u$  ne nalaze u 95% prediktivnim intervalima (18). Dakle, verifikacijski uvjet u ovom slučaju nije ispunjen. Uvidom u sliku 5 vidimo da smo, zapravo, značajno podcijenili smrtnost *unisex* populacije. Zbog toga smo se odlučili za projekcije (17) u kreiranju rentnih tablica opće populacije. Za daljnju analizu rentnih tablica izvedenih drugim odabirom (po donjim granicama 95% prediktivnih interevala) vidjeti slike u Dodatku.

U drugom koraku iz dobivenih periodnih tablica smrtnosti formirali smo kohortne tablice za generacije od 1951. do 2010. godine. Intenziteti smrtnosti  $\mu_x[\tau]$  osobe dobi  $x$  koja je rođena u kalendarskoj godini  $\tau$  (generacije je  $\tau$ ) dobivaju se iz periodnih tablica po formuli

$$\mu_x[\tau] = \mu_x(\tau + x). \quad (21)$$

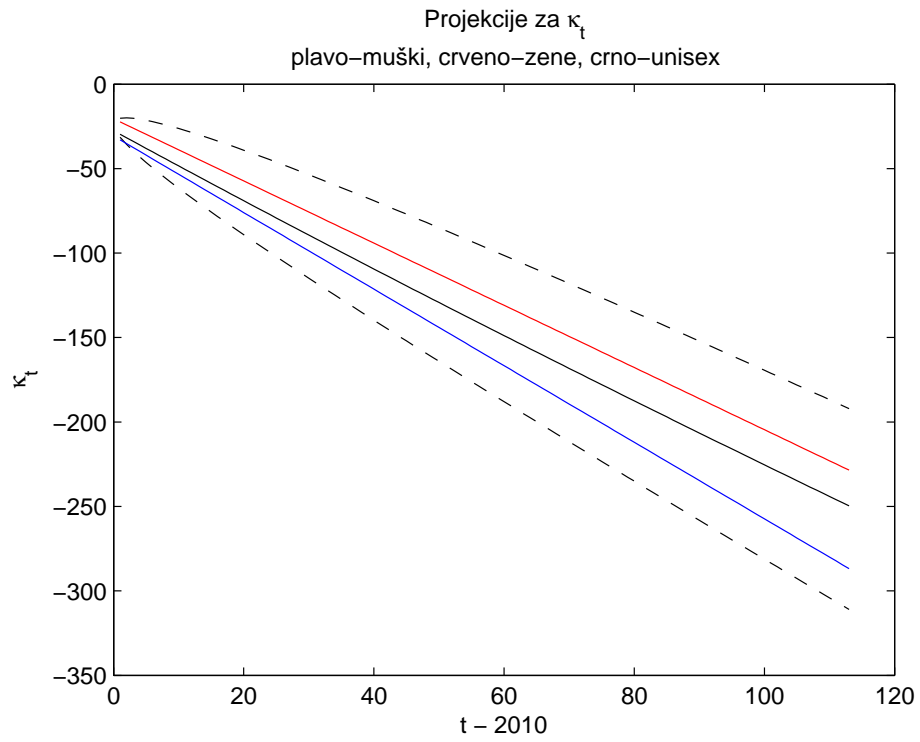
Odgovarajuće procijenjene vrijednosti kohortne tablice tada se direktno dobivaju iz procijenjenih ili projiciranih periodnih tablica iz prvog koraka primjenom formule (21):

$$\hat{\mu}_x[\tau] = \hat{\mu}_x(\tau + x). \quad (22)$$

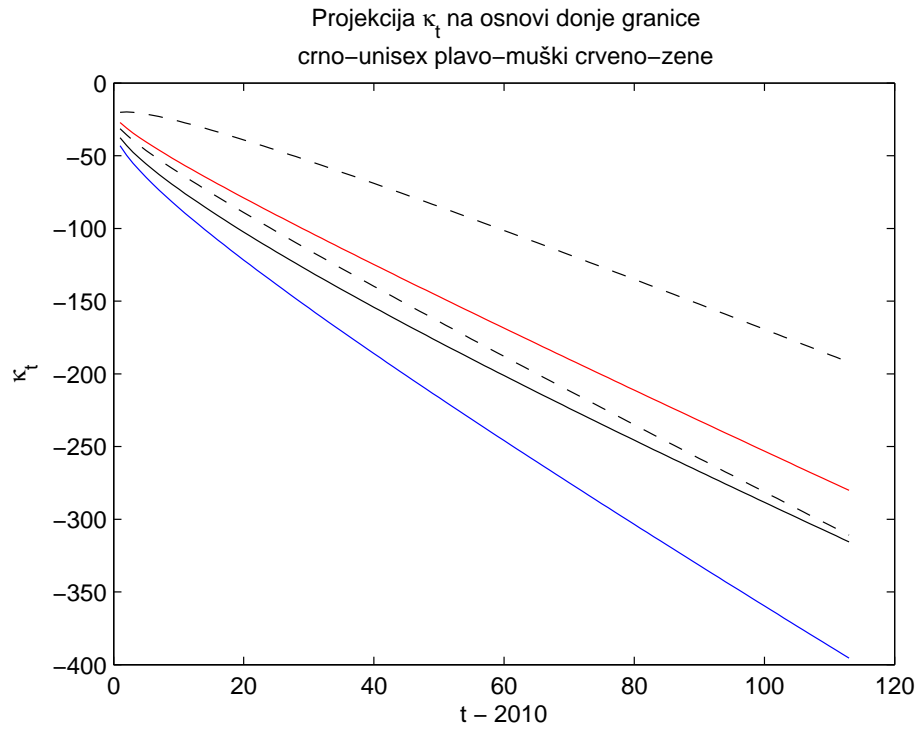
Treći korak sastoji se od izgladivanja procijenjenih vrijednosti kohorti iz drugog koraka. Prema [2] izgladivali smo logaritme intenziteta smrtnosti  $\mu_x[\tau]$  za svaku kohortu posebno metodom opisanom u [7]: izgladene vrijednosti  $\overset{\circ}{\mu}_x[\tau]$  za  $x = 0$  i  $x = 1$  jednake su neizgladenima,  $\log \overset{\circ}{\mu}_x[\tau]$  za  $x = 2, 3$  i  $4$ , dobiju se projiciranjem parabole procijenjenom metodom najmanjih kvadrata na osnovi 5 točaka  $(x + h, \log \hat{\mu}_{x+h}[\tau])$  za  $h = -2, -1, 0, 1, 2$ , a  $\log \overset{\circ}{\mu}_x[\tau]$  za  $x \geq 5$  dobiju se analognim projiciranjem parabole procijenjene metodom najmanjih kvadrata iz 11 točaka  $(x + h, \log \hat{\mu}_{x+h}[\tau])$  za  $|h| \leq 5$ . Na taj način izglađe se vrijednosti  $\mu_x[\tau]$  u dobima  $x$  od 0 do 95. Na osnovi oblika projiciranih kohorti u dobima  $x$  iznad 80 logaritme intenziteta smrtnosti projicirali smo pomoću pravca

$$\log \overset{\circ}{\mu}_x[\tau] = \ell_0 + \hat{k}(x - 80)$$

gdje je  $\ell_0 = \log \overset{\circ}{\mu}_{80}[\tau]$  vrijednost dobivena prethodnim postupkom izgladivanja pomoću parabola, a  $\hat{k}$  je koeficijent procijenjen metodom najmanjih kvadrata iz neizgladenih podataka  $(x, \log \hat{\mu}_x[\tau])$  u dobima  $x$  od  $x_0$  do 100,



Slika 4: Projekcija vremenskog niza ( $\kappa_t$ ).



Slika 5: Projekcija vremenskog niza ( $\kappa_t$ ) drugom metodom: po donjoj granici 95% prediktivnog intervala za muškarce i žene.



gdje je  $x_0$  dob manja ili jednaka 80, ali ne manja od 55, određena po kriteriju najboljeg koeficijenta determinacije prilagođenog pravca.

Na osnovi tako dobivenih kohornih tablica smrtnosti reprezentiranih izgladenim intenzitetima smrtnosti  $\mu_x[\tau] \equiv \overset{\circ}{\mu}_x[\tau]$  za sve dobi  $x$  od 0 do 120, odvojeno po spolu i zajedničke, za generacije  $\tau$  od 1951. do 2010. godine, izvedene veličine uvjetne vjerojatnosti doživljenja dobi  $x + 1$  osobe pristupne dobi  $x$ ,  $p_x[\tau]$ , te uvjetne vjerojatnosti smrti osobe pristupne dobi  $x$  prije navršene dobi  $x + 1$ ,  $q_x[\tau]$ , računaju se po formulama:

$$q_x[\tau] = \begin{cases} \frac{\mu_x[\tau]}{1 + f_x \cdot \mu_x[\tau]}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \exp(-\mu_x[\tau]), & x \geq 2, \end{cases} \quad p_x[\tau] = 1 - q_x[\tau], \quad (23)$$

pri čemu su vrijednosti koeficijenta  $f_x$  dane formulom (11). U slučaju *unisex* tablica,  $f_x = f_x^u = (f_x^m + f_x^f)/2$ .

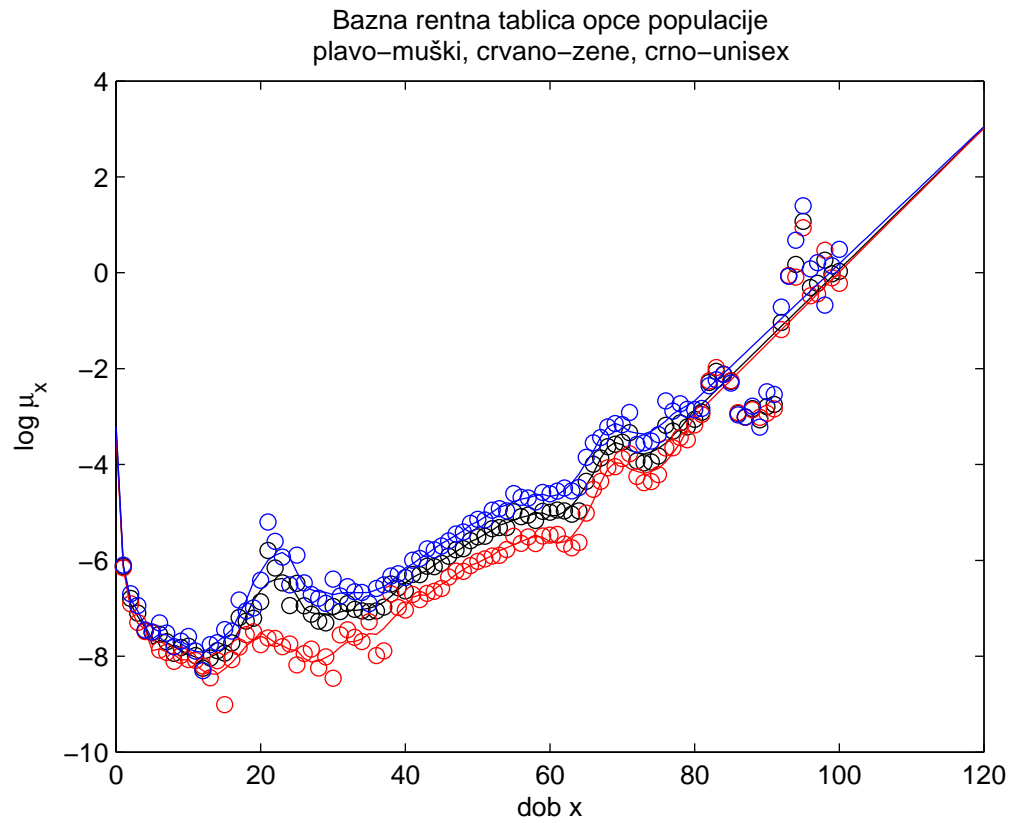
U četvrtom koraku odredili smo bazne rentne tablice za muškarce, žene i osobe neovisne o spolu. U svim slučajevima je to kohorta za generaciju 1970. Ta kohorta je odabrana za baznu jer će osoba rođena 1970. biti u dobi 45 2015. godine, odnosno bit će podjednako između dobi osobe koja će 2015. g. kupiti odgođeno rentno osiguranje i dobi osobe koja će iste godine postati osiguranik neodgođenog rentnog osiguranja. Na slici 6 prikazane su bazne rentne tablice zajedno s neizgladenim vrijednostima.

Peti korak sastoji se u određivanju vremenskih pomaka na osnovi kojih će se aproksimirati smrtnost pripadnika drugih kohorti pomoću bazne rentne tablice u svrhu izračunavanja očekivane sadašnje vrijednosti rentnih osiguranja. Označimo sa  $h(\tau)$  pomak u dobima bazne tablice za dobivanje tablice kohorte generacije  $\tau$ . Tada vrijedi:

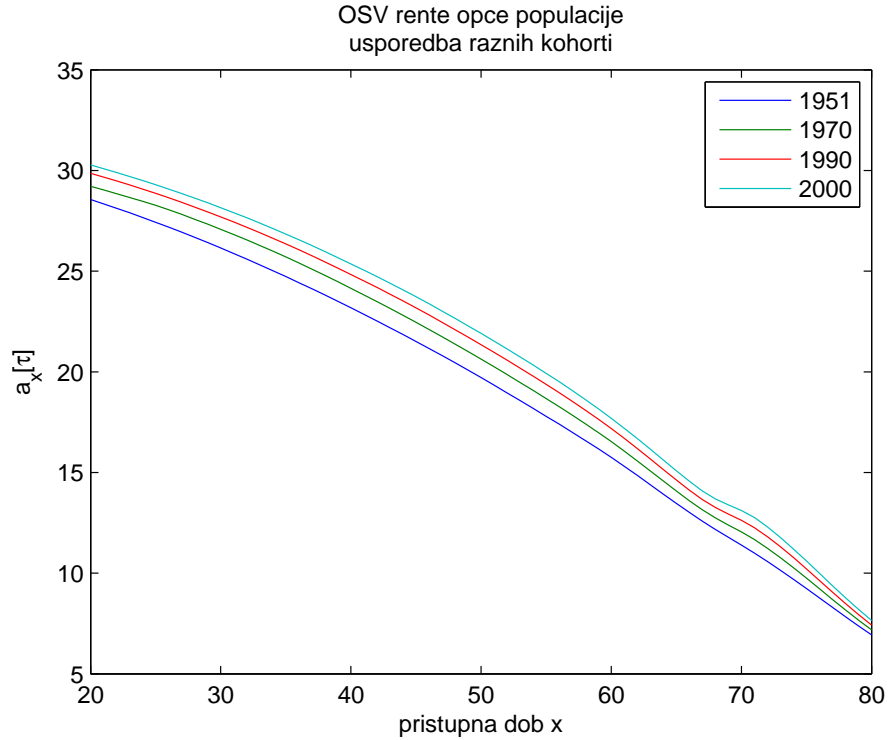
$$h(\tau) = \begin{cases} \geq 0, & \tau \leq 1970 \\ = 0, & \tau = 1970 \\ \leq 0, & \tau \geq 1970. \end{cases} \quad (24)$$

Pretpostavljamo da je  $q_x[\tau] \approx q_{x+h(\tau)}[1970]$  u smislu da je očekivana sadašnja vrijednost (doživotne) jedinične rente (OSV) osobe pristupne dobi  $x$  i rođene u godini  $\tau$ , u oznaci  $\ddot{a}_x[\tau]$ , približno jednaka  $\ddot{a}_{x+h(\tau)}[1970]$ . Uz tu pretpostavku odredili smo  $h(\tau)$  za svaki spol posebno i neovisno o spolu, na sljedeći način (vidjeti [1]).

Prvo smo izračunali OSV-ove za sve generacije  $\tau$  od 1951. do 2010., za sve dobi  $x$  i za dvije kamatne stope  $k = 2.75\%$  i  $k = 0\%$ , po formuli ( $v =$



Slika 6: Bazne rentne tablice opće populacije: za oba spola i unisex, izgladana i neizgladana.



Slika 7: OSV jediničnih renti opće populacije za razne generacije. Evaluacijska kamatna stopa je 2.75%.

$1/(1 + k/100)$ ):

$$\ddot{a}_x^k[\tau] = 1 + \sum_{n \geq 1} p_x[\tau] \cdot p_{x+1}[\tau] \cdots p_{x+n-1}[\tau] \cdot v^n.$$

Na slici 7 prikazane su usporedbe OSV-a (uz  $k = 2.75\%$ ) za 4 različite kohorte.

Zatim smo za obje kamatne stope, za svaki  $\tau$  i za svaki  $x$  od dobi 55 do dobi 70 odredili pomak  $h^k(x, \tau)$  tako da vrijedi

$$\ddot{a}_{x+h^k(x, \tau)+1}^k[1970] < \ddot{a}_x^k[\tau] \leq \ddot{a}_{x+h^k(x, \tau)}^k[1970].$$

Za svaki  $k$  i  $\tau$  smo zatim usrednjili dobivene korake:

$$h^k(\tau) = \frac{1}{16} \sum_{x=55}^{70} h^k(x, \tau).$$

Pomake u koracima  $h(\tau)$  smo zatim procijenili kao onu cijelu vrijednost koja je najbliža vrijednosti  $(h^{2.75\%}(\tau) + h^{0\%}(\tau))/2$ . U slučaju *unisex* populacije, tu vrijednost smo eventualno korigirali kako bi se zadržao očekivani odnos između OSV-a muškaraca, žena i osoba bez obzira na spol, u svim relevantnim dobima.

### 3 Rentne tablice osiguranika odgođenih renti

Rentne tablice osiguranika odgođenih renti dobivaju se korigiranjem uvjetnih vjerojatnosti smrti opće populacije za određeni faktor, standardizirani omjer smrtnosti (SMR):

$$q_x^{OR}[\tau] = \text{SMR}_x^{OR} \cdot q_x[\tau]. \quad (25)$$

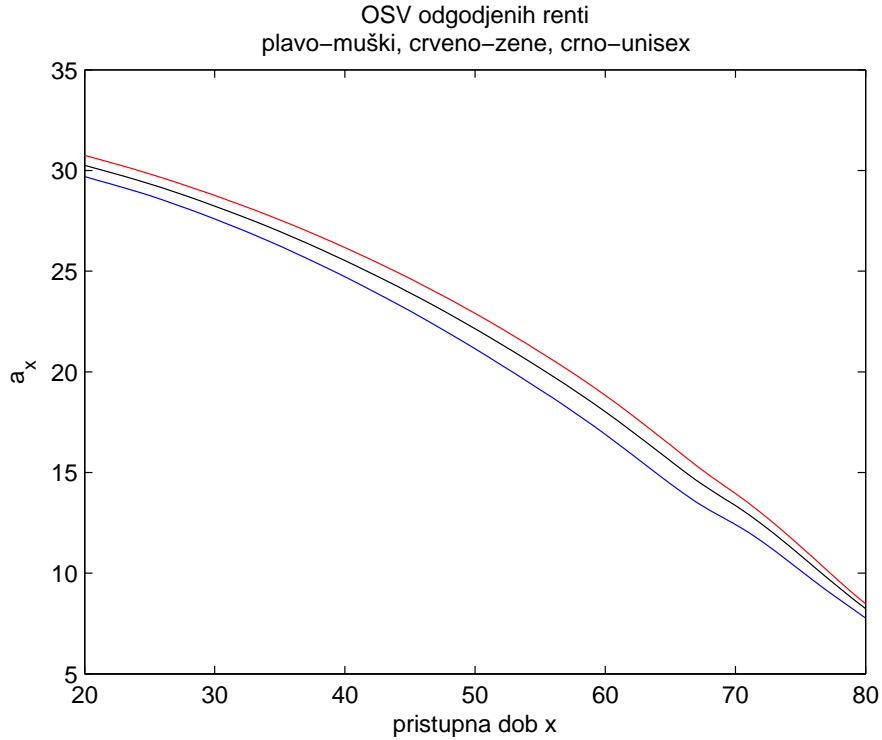
U skladu sa slovenskim pristupom navedenim u [1] i [6], te uz konzultacije s Radnom grupom HAD-a, standardizirani omjeri smrtnosti korišteni za hrvatske rentne tablice za muškarce i žene podudaraju se sa odgovarajućim standardiziranim omjerima smrtnosti za slovenske rentne tablice (vidjeti [1]). Dakle, SMR za muškarce jest (rekurzivna definicija po  $x$ ):

$$\text{SMR}_x^{ORm} = \begin{cases} q_{48}^{PNMA00}/q_{48}^{ELT16M}, & x \leq 48 \\ q_x^{PNMA00}/q_x^{ELT16M}, & 49 \leq x \leq 65 \\ \text{SMR}_{65}^{ORm}, & 66 \leq x \leq 71 \\ q_x^{PNMA00}/q_x^{ELT16M}, & 72 \leq x \leq 78 \\ \text{SMR}_{78}^{ORm}, & 79 \leq x \leq 107 \\ \text{SMR}_{78}^{ORm} + (1 - \text{SMR}_{78}^{ORm})(x - 108)/12, & 108 \leq x \leq 120, \end{cases} \quad (26)$$

te za žene:

$$\text{SMR}_x^{ORf} = \begin{cases} q_{49}^{PNFA00}/q_{49}^{ELT16F}, & x \leq 49 \\ q_x^{PNFA00}/q_x^{ELT16F}, & 50 \leq x \leq 75 \\ \text{SMR}_{75}^{ORf}, & 76 \leq x \leq 110 \\ \text{SMR}_{75}^{ORf} + (1 - \text{SMR}_{75}^{ORf})(x - 111)/9, & 111 \leq x \leq 120. \end{cases} \quad (27)$$

Ovdje su korištene stope smrtnosti engleske opće populacije, u oznaci za muškarce  $q_x^{ELT16M}$  i žene  $q_x^{ELT16F}$ , dobivene iz English Life Table ELF16 (dostupno na [www.ons.gov.uk](http://www.ons.gov.uk)), te stope smrtnosti za osiguranike odgođenih



Slika 8: OSV jediničnih renti osiguranika odgođenih renti za generaciju 1970. Evaluacijska kamatna stopa je 2.75%.

renti (engleske potpopulacije), u oznaci za muškarce  $q_x^{PNMA00}$  i žene  $q_x^{PNFA00}$ , dobivene iz PNMA00 i PNFA00 Mortality Tables (pensioners, amounts) (dostupno na [www.actuaries.org.uk](http://www.actuaries.org.uk)).

Za standardizirane omjere smrtnosti obzirom na *unisex* populaciju, koristili smo također pristup iz [1]. Uz konzultacije s Radnom grupom HAD-a, dobiveni su sljedeći standardizirani omjeri:

$$\text{SMR}_x^{ORu} = \begin{cases} q_{48}^{PNUA00}/q_{48}^{ELT16U}, & x \leq 48 \\ q_x^{PNUA00}/q_x^{ELT16U}, & 49 \leq x \leq 77 \\ \text{SMR}_{77}^{ORu}, & 78 \leq x \leq 109 \\ \text{SMR}_{77}^{ORu} + (1 - \text{SMR}_{77}^{ORu})(x - 110)/10, & 110 \leq x \leq 120. \end{cases} \quad (28)$$

Ovdje su vrijednosti stopa smrtnosti  $q_x^{ELT16U}$  dobivene iz English *Pearsons* Life Table ELF16, u oznaci ELF16U (dostupno na [www.ons.gov.uk](http://www.ons.gov.uk)). Stope

smrtnosti  $q_x^{PNUA00}$  procijenjene su pomoću odgovarajućih stopa smrtnosti iz PNMA00 i PNFA00 Mortality Tables sljedećom formulom (za dobi  $x \geq 20$ ):

$$q_x^{PNUA00} = \beta_x^m q_x^{PNMA00} + \beta_x^f q_x^{PNFA00}, \quad (29)$$

gdje su omjeri  $\beta_x$  izračunati iz ELT16U po formuli:

$$\beta_x^m = \frac{\ell_x^m}{\ell_x^u}, \quad \beta_x^f = \frac{\ell_x^f}{\ell_x^u}. \quad (30)$$

$\ell_x^u$  je tablična vrijednost u ELT16U za *pearsons*, a  $\ell_x^m$  i  $\ell_x^f$  predstavljaju brojeve muškaraca i žena među njima tako da vrijedi  $\ell_x^u = \ell_x^m + \ell_x^f$ .

Na slici 8 nalazi se usporedba OSV jediničnih renti osiguranika odgođenih renti za generaciju 1970.

## 4 Rentne tablice osiguranika neodgođenih renti

Rentne tablice osiguranika neodgođenih renti dobivaju se korigiranjem uvjetnih vjerojatnosti smrti osiguranika odgođenih renti za faktor  $K_x$ :

$$q_x^{NR}[\tau] = K_x \cdot q_x^{OR}[\tau]. \quad (31)$$

U skladu sa slovenskim pristupom navedenim u [1] i [6], te uz konzultacije s Radnom grupom HAD-a, faktori  $K_x$  korišteni za hrvatske rentne tablice za muškarce i žene podudaraju se sa odgovarajućim faktorima za slovenske rentne tablice (vidjeti [1]). Dakle, odgovarajući faktor za muškarce, u oznaci  $K_x^m$ , je (rekurzivna definicija po  $x$ ):

$$K_x^m = \begin{cases} 1, & x \leq 63 \\ q_x^{IML00}/q_x^{PNMA00}, & 64 \leq x \leq 86 \\ 1, & 87 \leq x \leq 120, \end{cases} \quad (32)$$

te za žene (u oznaci  $K_x^f$ ):

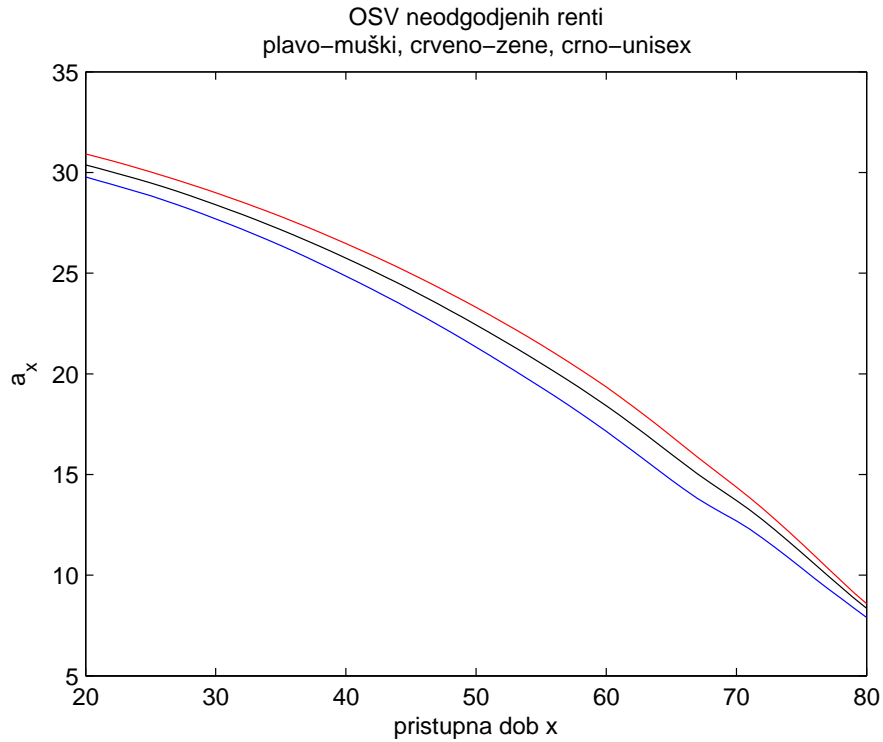
$$K_x^f = \begin{cases} 1, & x \leq 54 \\ 1 - (1 - q_{60}^{IFL00}/q_{60}^{PNFA00})(x - 54)/6, & 55 \leq x \leq 59 \\ q_x^{IFL00}/q_x^{PNFA00}, & 60 \leq x \leq 84 \\ 1, & 85 \leq x \leq 120. \end{cases} \quad (33)$$

Ovdje  $q_x^{IML00}$  i  $q_x^{IFL00}$  označavaju stope smrtnosti za muške (M) i ženske (F) osiguranike neodgođenih renti iz IML00 i IFL00 Mortality Tables (immediate annuitants, lives) (dostupno na [www.actuaries.org.uk](http://www.actuaries.org.uk)).

Odgovarajući faktor obzirom na *unisex* populaciju, u oznaci  $K_x^u$ , uz konzultacije s Radnom grupom HAD-a, jednak je:

$$K_x^u = \begin{cases} 1, & x \leq 61 \\ q_x^{IUL00}/q_x^{PNUA00}, & 62 \leq x \leq 85 \\ 1, & 86 \leq x \leq 120. \end{cases} \quad (34)$$





Slika 9: OSV jediničnih renti osiguranika neodgodjenih renti za generaciju 1970. Evaluacijska kamatna stopa je 2.75%.

Ovdje su stope smrtnosti  $q_x^{IUL00}$  procijenjene pomoću odgovarajućih stopa smrtnosti iz IML00 i IFL00 Mortality Tables, formulom (za dobi  $x \geq 60$ ):

$$q_x^{IUL00} = \beta_x^m q_x^{IML00} + \beta_x^f q_x^{IFL00}, \quad (35)$$

gdje su omjeri  $\beta_x$  izračunati po formuli (30).

Na slici 9 nalazi se usporedba OSV jediničnih renti osiguranika neodgodjenih renti za generaciju 1970.

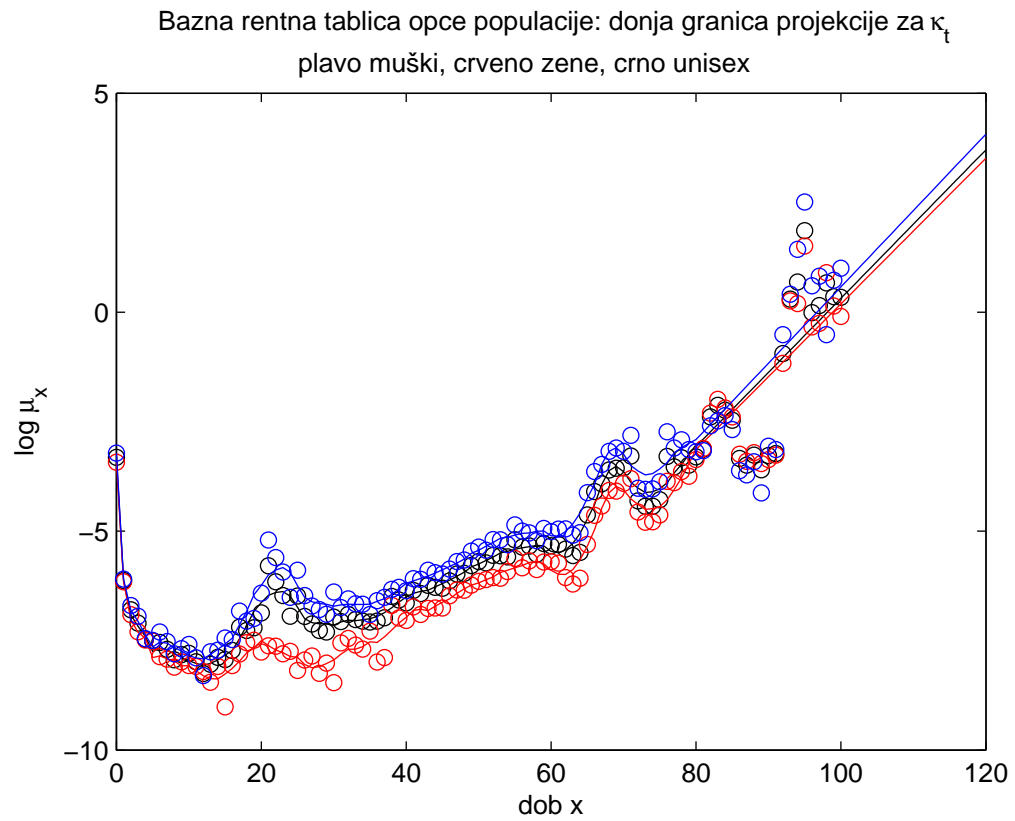
# Literatura

- [1] A. AHČAN, D. MEDVED, E. PITACCO, J. SAMBT, R. SRAKA, *Slovenian Annuity Tables*, Faculty of Economics, Ljubljana, 2012.
- [2] D. BAKIĆ, B. BASRAK, A. TAFRO, *Tablice aktuarske matematike* (studija za potrebe HZZO), PMF-MO, Zagreb, prosinac 2012.
- [3] P.J. BROCKWELL, R.A. DAVIS, *Time Series: Theory and Methods*, 2nd ed., Springer, 1991.
- [4] N. BROUHNS, M. DENUIT, J.K. VERMUNT, A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables, *Insurance: Mathematics and Economics* 31 (2002) 373-393
- [5] D. CHUA, S. DE GUZMAN, *Understanding the Poisson Log-Bilinear Regression Approach. Projecting the Mortality of some Northern European Countries*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.
- [6] D. MEDVED, A. AHČAN, J. SAMBT, E. PITACCO, Adoption of projected mortality table for the Slovenian market using the Poisson log-bilinear model to test the minimum standard for valuing life annuities, *Economic and Business review* 13 (4) (2011) 251-272
- [7] *On Mortality and Life Expectancy*, English version of AG report *Oversterfte en Overleven*, Actuarieel Genootschap, April 2007
- [8] *Tablice mortaliteta Republike Hrvatske 2000.-2002.*, Državni zavod za statistiku, Zagreb, 2007.

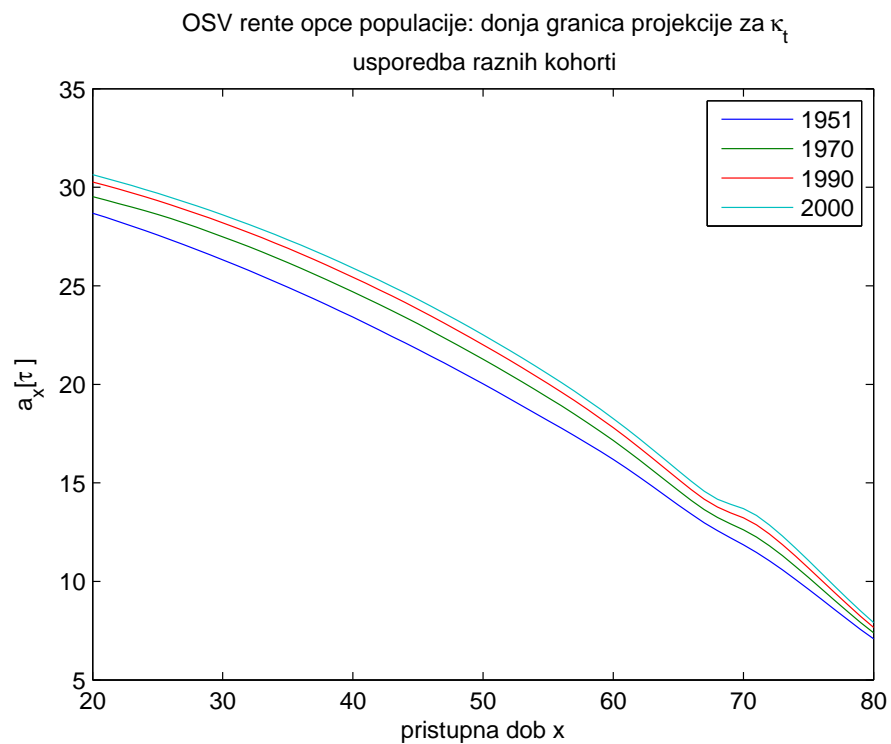
# Dodatak

*Rentne tablice na bazi projekcija niza  $(\kappa_t)$  za muškarce i žene donjim granicama 95% prediktivnih intervala*

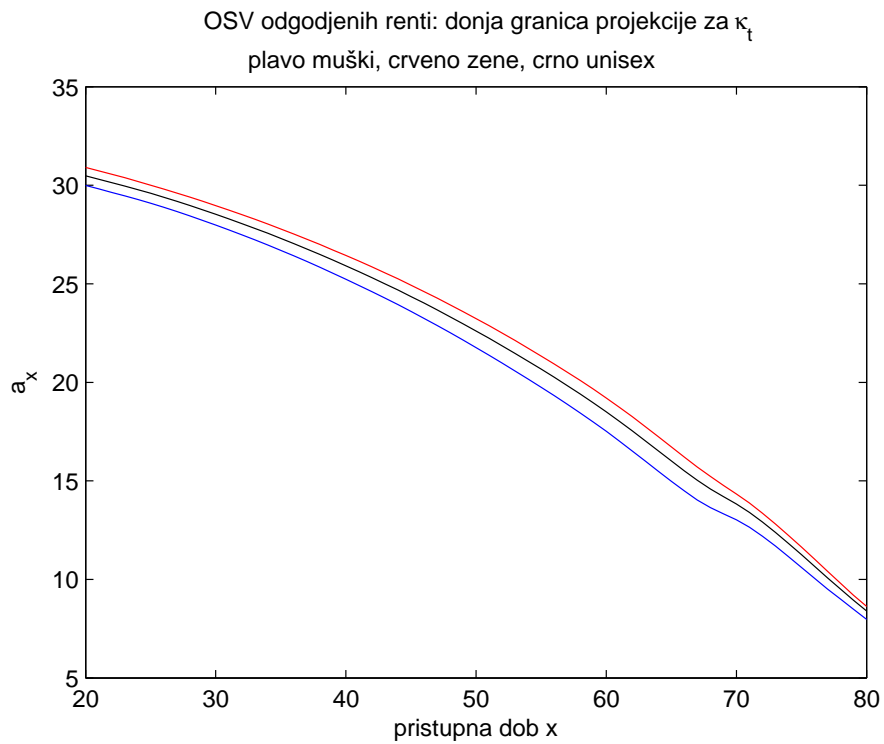
U dodatku se nalaze analogoni slika 6 (slika 10), 7 (11), 8 (12) i 9 (12) za rentne tablice konstruirane na način opisan u glavnom tekstu, ali uz projekcije niza  $(\kappa_t)$  za muškarce i žene po formulama (19-20) i projekciju intenziteta smrtnosti *unisex* populacije opisanog u poglavlju 2.



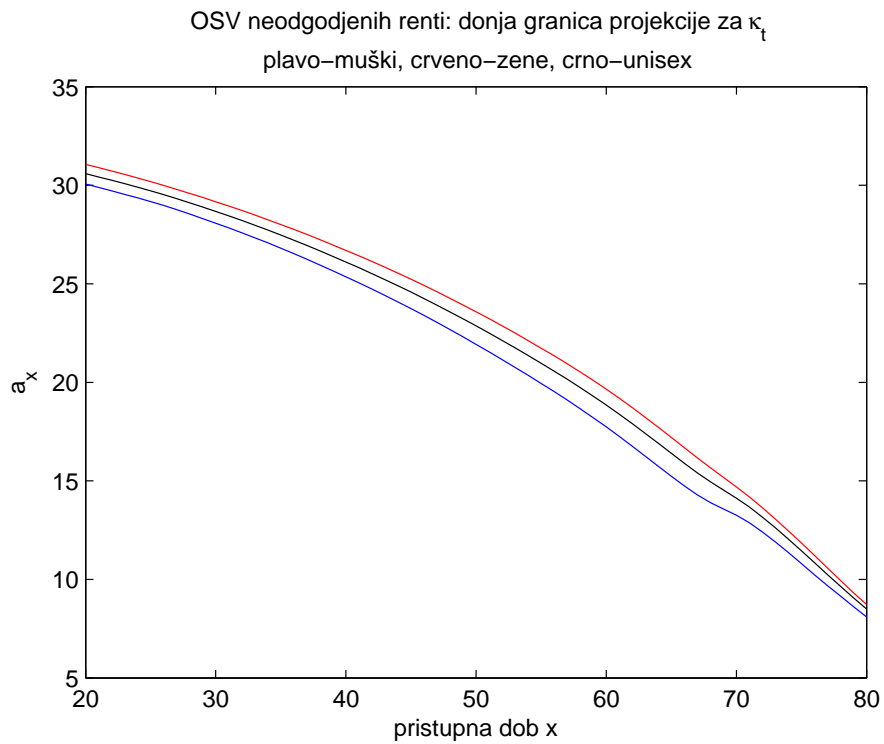
Slika 10: Bazne rentne tablice opće populacije: za oba spola i unisex, izgladana i neizgladana.



Slika 11: OSV jediničnih renti opće populacije za razne generacije. Evaluacijska kamatna stopa je 2.75%.



Slika 12: OSV jediničnih renti osiguranika odgođenih renti za generaciju 1970. Evaluacijska kamatna stopa je 2.75%.



Slika 13: OSV jediničnih renti osiguranika neodgođenih renti za generaciju 1970. Evaluacijska kamatna stopa je 2.75%.